Une condition asymptotique pour le calcul de constantes de Sobolev logarithmiques sur la droite

Laurent Miclo

Une condition asymptotique pour le calcul de constantes de Sobolev logarithmiques sur la droite

Laurent Miclo

Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, U.M.R. 6632
Université de Provence et C.N.R.S.
France

Résumé

On présente une formule explicite pour la constante de Sobolev logarithmique correspondant à des diffusions réelles ou à des processus entiers de vie et de mort, sous l'hypothèse que certaines quantités, naturellement associées à des inégalités de Hardy dans ce contexte, approchent leur supremum au bord de leur domaine de définition. La preuve se ramène au cas de la constante de Poincaré, à l'aide de comparaisons exactes entre entropie et variances appropriées. Malheureusement, cette démarche n'a pas permis de retrouver la constante de Sobolev logarithmique relative à la distribution gaussienne, bien que certains indices suggèrent qu'elle relève aussi des phénomènes observés ici.

Abstract

An explicit formula for the logarithmic Sobolev constant relative to real diffusions or to birth and death integer-valued processes is presented, under an asymptotical assumption for quantities naturally associated to Hardy's inequalities in this context. Taking into account exact comparisons between entropy and appropriate variances, the proof comes back to Poincaré's inequality situation. Unfortunately, this approach did not enable to recover the famous logarithmic Sobolev constant of Gaussian distribution, but a conjecture will be given in this direction.

Mots clés : inégalités de Sobolev logarithmiques, inégalités de Poincaré, inégalités de Hardy, comparaisons entre entropies et variances, diffusions réelles, processus entiers de vie et de mort.

MSC2000 : premièrement : 46E35, secondairement : 37A30, 60E15, 94A17, 49R50.

1 Introduction

Des estimées très précises de constantes optimales associées à des inégalités fonctionnelles sont parfois importantes pour l'obtention de propriétés fines de convergence de processus de Markov. On présente dans ce papier des circonstances dans lesquelles un calcul exact est possible pour la constante de Sobolev logarithmique correspondant à des diffusions réelles. Les données du problème sont une probabilité invariante pour un générateur markovien, lequel sera lui-même commodément fournit sous forme d'une mesure (par le biais de la théorie des formes de Dirichlet dans des cas réguliers). Ce contexte peut sembler très restrictif, il apparaît toutefois fréquemment lors de réductions de problèmes sur des espaces d'état a priori plus compliqués.

Plus précisément, soient μ et ν une probabilité et une mesure (positive) sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{R}$. On s'intéresse à la meilleure constante $C(\mu,\nu) \in \bar{\mathbb{R}}_+$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\mathbb{L}^2(\mu)$, tout en étant absolument continue de dérivée faible f', l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante soit satisfaite

$$\mathrm{Ent}(f^2,\mu) \quad \leq \quad C(\mu,\nu)\nu[(f')^2]$$

où le membre de gauche désigne l'entropie de f^2 par rapport à μ, qui vaut $\mu[f^2\ln(f^2)] - \mu[f^2]\ln(\mu[f^2])$, cette quantité étant toujours bien définie à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ pour $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$.
Dans un article très novateur [3], Bobkov et Götze ont proposé une estimation de $C(\mu,\nu)$ valable à des facteurs universels près : soit m une médiane de μ et notons

$$\begin{aligned}
\bar{D}_-(\mu,\nu,m) &\coloneqq \sup_{x<m} \int_x^m \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu(]-\infty,x])\ln(1/\mu(]-\infty,x])) \\
\bar{D}_+(\mu,\nu,m) &\coloneqq \sup_{x>m} \int_m^x \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu([x,+\infty[)\ln(1/\mu([x,+\infty[))
\end{aligned}$$

où $d\nu/d\lambda$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Comme d'habitude, la convention $0\cdot\infty = 0$ sera toujours sous-entendue, sauf mention contraire. Dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, on est alors assuré de l'encadrement

$$(\bar{D}_-(\mu,\nu,m) \vee \bar{D}_+(\mu,\nu,m))/150 \;\leq\; C(\mu,\nu) \;\leq\; 2880(\bar{D}_-(\mu,\nu,m) \vee \bar{D}_+(\mu,\nu,m))$$

(Bobkov et Götze n'avaient considéré que la situation où $\nu = \mu$, mais leur approche basée sur des inégalités de Hardy s'étend au cas général, pour les constantes numériques ci-dessus, voir aussi le livre [1] de Ané, Blachère, Chafaï, Fougères, Gentil, Malrieu, Roberto et Scheffer).
Récemment, Barthe et Roberto [2] ont amélioré cette estimée en prouvant que

$$\widetilde{D}_-(\mu,\nu,m) \vee \widetilde{D}_+(\mu,\nu,m) \;\leq\; C(\mu,\nu) \;\leq\; 4(\widehat{D}_-(\mu,\nu,m) \vee \widehat{D}_+(\mu,\nu,m))$$

avec, toujours pour une médiane m de μ donnée (s'il existe plusieurs médianes, on choisira la plus avantageuse pour chacune des bornes),

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_-(\mu,\nu,m) &\coloneqq \sup_{x<m} \int_x^m \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu(]-\infty,x])\ln(1+1/(2\mu(]-\infty,x]))) \\
\widehat{D}_-(\mu,\nu,m) &\coloneqq \sup_{x<m} \int_x^m \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu(]-\infty,x])\ln(1+e^2/\mu(]-\infty,x]))
\end{aligned}$$

et des expressions similaires et symétriques dans leur formulation par rapport à m pour $\widetilde{D}_+(\mu,\nu,m)$ et $\widehat{D}_+(\mu,\nu,m)$.

Notre objectif ici est de donner, sous certaines conditions, une expression exacte pour $C(\mu,\nu)$ du même type que celles ci-dessus, comme nous l'avons fait précédemment [9] pour la constante de Poincaré. De manière plus détaillée, soient $M_\mu^- \in \mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}$ et $M_\mu^+ \in \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$ l'infimum et le supremum du support de μ. On considère également l'application

$$\Phi \,:\, \mathbb{R}_+ \ni t \quad \mapsto \quad \frac{\sqrt{t}\ln(t)}{\sqrt{t}-1} \in \mathbb{R}_+$$

(que l'on aura prolongé par continuité en 1 : $\Phi(1) = 2$). Puis on pose, pour tout m appartenant à $]M_\mu^-, M_\mu^+[$ (plus nécessairement une médiane de μ),

$$\begin{aligned}
D_-(\mu,\nu,m) &\coloneqq \sup_{x<m} \int_x^m \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu(]-\infty,x])\Phi(1/\mu(]-\infty,x])) \\
D_+(\mu,\nu,m) &\coloneqq \sup_{x>m} \int_m^x \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu([x,+\infty[)\Phi(1/\mu([x,+\infty[)) \\
D(\mu,\nu,m) &\coloneqq D_-(\mu,\nu,m) \vee D_+(\mu,\nu,m)
\end{aligned}$$

Notre principal résultat s'énonce alors

Théorème 1 *Supposons, pour un $m \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$ donné, soit que $\mu(\{M_\mu^-\}) = 0$ et*

$$\lim_{x\to M_\mu^- +} \int_x^m \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu(]-\infty,x])\Phi(1/\mu(]-\infty,x])) \;=\; D(\mu,\nu,m)$$

soit que $\mu(\{M_\mu^+\}) = 0$ et

$$\lim_{x\to M_\mu^+ -} \int_m^x \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu([x,+\infty[)\Phi(1/\mu([x,+\infty[)) \;=\; D(\mu,\nu,m)$$

Alors on a

$$C(\mu,\nu) \;=\; 4D(\mu,\nu,m)$$

Par symétrie du problème, on se ramène désormais à ne considérer que la seconde alternative dans les conditions ci-dessus. Du fait que $\mu(\{M_\mu^+\}) = 0$, et par conséquence $\lim_{x\to M_\mu^+ -} \mu([x,+\infty[)$ $\Phi(1/\mu([x,+\infty[)) = 0$, cette hypothèse équivaut à

$$\forall\, y \in]M_\mu^-, M_\mu^+[, \qquad \lim_{x\to M_\mu^+ -} \int_y^x \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu([x,+\infty[)\Phi(1/\mu([x,+\infty[)) \;=\; D(\mu,\nu,m)$$

du moins si $D(\mu,\nu,m) < +\infty$ (ceci n'est plus nécessairement vrai pour tout $y \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$ seulement s'il existe un segment compact $I \subset]M_\mu^-, M_\mu^+[$ tel que $\int_I 1/(\frac{d\nu}{d\lambda})\, d\lambda = +\infty$, auquel cas $D(\mu,\nu,m) = +\infty$). Néanmoins, par définition, la constante $D(\mu,\nu,m)$ continue à dépendre du choix de m, qui peut être crucial comme le montre l'exemple suivant : prenons pour μ la probabilité définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \mu(dx) \;\coloneqq\; \mathbb{1}_{]-\infty,-1]}(x)\exp(-\frac{(x+1)^2}{2})\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\exp(-\frac{(x-1)^2}{2})\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

L'ensemble des médianes correspondantes est $[-1,1]$. Choisissons $\nu \ll \lambda$ vérifiant $d\nu/d\lambda = 1$ sur $[-1,1]$ et

$$\begin{aligned}
\forall\, x < -1, \qquad \int_x^0 \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu(]-\infty,x])\Phi(1/\mu([x,+\infty[)) &= \frac{1}{2}\Phi(2) \\
\forall\, x > 1, \qquad \int_0^x \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \mu([x,+\infty[)\Phi(1/\mu([x,+\infty[)) &= \frac{1}{2}\Phi(2)
\end{aligned}$$

Cet ajustement est bien possible car l'application $]0,1/2] \ni t \mapsto t\Phi(1/t)$ est strictement croissante. Par rapport à la médiane $m=0$, il apparaît que $D(\mu,\nu,0)=1/2\Phi(2)$ et le théorème 1 s'applique pour fournir que $C(\mu,\nu)=1/2\Phi(2)$. Par contre le choix d'une autre médiane que 0, ou d'un point $m\in\mathbb{R}$ qui n'en soit pas une, conduit à une constante $D(\mu,\nu,m)$ strictement supérieure à $1/2\Phi(2)$ et ainsi les conditions du théorème ne sont pas remplies !
On pensait que le théorème 1 permettrait de retrouver l'exemple le plus célèbre d'inégalité de Sobolev logarithmique (dû à Gross [6]), qui dit que $C(\gamma,\gamma)=2$, où γ est la distribution gaussienne standard. Mais ceci est faux, car bien que

$$C(\gamma,\gamma) \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \left(\frac{d\gamma}{d\lambda}\right)^{-1} d\lambda\, \gamma([x,+\infty[)\Phi(1/\gamma([x,+\infty[))$$

on a $D(\gamma,\gamma,0)>2$ (par symétrie de ce problème, 0 est le meilleur choix possible pour m, c'est également la seule médiane de γ).
De manière plus évasive encore, le cas des inégalités de Sobolev logarithmiques associées aux opérateurs de Laguerre de petit paramètre (voir par exemple [7, 8]) ne peut pas non plus se retrouver à partir des arguments développés ici. Il s'agit même en quelque sorte d'une situation inverse : la constante de Sobolev logarithmique y dépendait surtout de certains comportements au voisinage d'un point interne (la moyenne de la distribution gamma sous-jacente), alors que dans le théorème 1 cette constante est dictée par "ce qui se passe en l'infini" (rôle joué par M_μ^- ou M_μ^+). Ainsi, même en dimension un, certains aspects des inégalités de Sobolev logarithmiques restent à mieux appréhender, avec d'éventuelles conséquences concernant d'autres inégalités fonctionnelles, en particulier les inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées. Ces perspectives ont constitué la motivation première de cette étude.

Le plan du papier est comme suit : dans la section suivante on reprendra une condition asymptotique obtenue dans [9] pour calculer des constantes de Poincaré dans un contexte symétrique et on en profitera pour donner quelques renseignements supplémentaires sur certaines fonctions "presque maximisantes". On verra ensuite dans la section 3 comment supprimer l'hypothèse de symétrie. Ces préliminaires permettront dans les sections 4 et 5 de prouver respectivement les bornes $C(\mu,\nu)\leq 4D(\mu,\nu,m)$ et $C(\mu,\nu)\geq 4D(\mu,\nu,m)$ sous les hypothèses du théorème 1. Nous reviendrons sur les limitations de cette approche pour le cas $\mu=\nu=\gamma$ dans la section 6. Enfin nous nous intéresserons à un équivalent discret du théorème 1 lors de la dernière section.

2 Rappel d'une condition asymptotique symétrique

Dans [9], une condition asymptotique a été obtenue pour le calcul exact de la constante de Poincaré dans un contexte symétrique. Nous allons voir comment elle permet de restreindre le domaine fonctionnel sur lequel est pris le supremum définissant cette constante, ce qui illustre le fait que dans ce type de situation, les "points à l'infini" déterminent la constante de Poincaré.

Rappelons que la constante de Poincaré $A(\mu,\nu)$ associée à μ et ν, une probabilité et une mesure comme dans la section précédente, est définie par

$$A(\mu,\nu) \quad := \quad \sup_{f\in\mathcal{C}} \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des fonctions f absolument continues (de dérivée faible notée f') et où la variance d'une fonction mesurable f par rapport à une mesure μ est définie à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ par

$$\mathrm{Var}(f,\mu) \quad := \quad \frac{1}{2}\int (f(y)-f(x))^2\,\mu(dx)\mu(dy)$$

Ici nous supposerons que μ et ν sont symétriques par rapport à 0 :

$$\forall\ R \in \mathcal{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \mu(R) & = & \mu(-R) \\ \nu(R) & = & \nu(-R) \end{array} \right.$$

Ainsi on a $M_\mu^- = -M_\mu^+$ et on définit

$$\forall\ x \geq 0, \qquad b_{\mu,\nu}(x) \ \ \coloneqq \ \ \int_0^x \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \mu([x,+\infty[)$$

où l'on désigne désormais de la même manière la mesure ν et sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue (laquelle est bien λ-p.p. définie à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, même si ν n'est pas σ-finie, voir par exemple [9]). Puis on pose

$$B(\mu,\nu) \ \ \coloneqq \ \ \sup_{x\geq 0} b_{\mu,\nu}(x)$$

(on n'a pas considéré ici les autres choix possibles de m, car parmi eux, outre d'être le plus naturel, 0 est celui qui fournit la constante $B(\mu,\nu,m)$ la plus petite).

Proposition 2 *Sous l'hypothèse que* $\mu(\{M_\mu^+\}) = 0$ *et* $B(\mu,\nu) = \lim_{x\to M_\mu^+ -} b_{\mu;\nu}(x)$*, on a* $A(\mu,\nu) = 4B(\mu,\nu)$*.*

Ce résultat a été montré dans [9], en se basant sur l'observation plus intéressante suivante.
Soit F_μ^{-1} l'inverse généralisé de la fonction de répartition de μ,

$$\forall\ u \in]0,1[, \qquad F_\mu^{-1}(u) \ \ \coloneqq \ \ \inf\{x \in \mathbb{R} \,:\, \mu(]-\infty,x]) > u\}$$

On définit ensuite

$$\forall\ u \in]1/2,1[, \qquad \widetilde{b}_{\mu,\nu}(u) \ \ \coloneqq \ \ \int_0^{F_\mu^{-1}(u)} \frac{1}{\nu}\, d\lambda$$

pour pouvoir énoncer la

Proposition 3 *La constante* $A(\mu,\nu)$ *ne dépend que de* $(\widetilde{b}_{\mu,\nu}(u))_{1/2<u<1}$ *et c'en est une fonctionnelle croissante.*

Malheureusement, en l'absence de symétrie pour la constante de Poincaré et dans le cas général pour celle de Sobolev logarithmique, nous n'avons pas trouvé de réarrangement des données μ et ν similaire à celui de la proposition ci-dessus qui conduise à un résultat de monotonicité. Celui-ci serait pourtant très pratique pour obtenir des estimations des constantes étudiées, comme on l'expliquera dans la section 6. Nous n'avons pu qu'étendre la proposition 2, d'ailleurs en ne se basant que sur elle.

L'hypothèse de la proposition 2 semble signifier que les "infinis" $-M_\mu^+$ et M_μ^+ jouent un rôle prépondérant dans la détermination de $A(\mu,\nu)$. Nous allons maintenant justifier cette assertion. Pour $0 < \eta < 1/2$, notons $M_\mu(\eta) \coloneqq F_\mu^{-1}(1-\eta)$ et introduisons $\mathcal{F}(\eta)$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{C}$ qui sont nulles sur $[-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]$.

Lemme 4 *Sous les hypothèses de la proposition 2 et si* $B(\mu,\nu) < +\infty$*, on a pour tout* $0 < \eta < 1/2$*,*

$$A(\mu,\nu) \ \ = \ \ \sup_{f\in\mathcal{F}(\eta)} \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

Preuve

Pour $0 < \eta < 1/2$ fixé, soit $l \ll \lambda$ la mesure dont la densité vaut $+\infty$ sur $[-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]$ et 0 ailleurs (i.e. telle que pour tout $R \in \mathcal{R}$, $l(R) = 0$ ou $+\infty$ suivant que $\lambda(R \cap [-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]) = 0$

ou $\lambda(R \cap [-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]) > 0)$ et considérons $\widetilde{\nu} \coloneqq \nu + l$. Cette mesure reste symétrique par rapport à 0, on a $b_{\mu,\widetilde{\nu}} \leq b_{\mu,\nu}$, et sous les hypothèses de la proposition 2,

$$B(\mu, \widetilde{\nu}) \;=\; \lim_{x \to M_\mu^+ -} b_{\mu,\nu} \;=\; B(\mu, \nu)$$

Ceci permet d'appliquer cette proposition, pour obtenir

$$A(\mu, \widetilde{\nu}) \;=\; 4B(\mu, \widetilde{\nu}) \;=\; A(\mu, \nu)$$

Cependant pour $f \in \mathcal{C}$, on a $\widetilde{\nu}[(f')^2] = +\infty$ dès que f' n'est pas λ-p.p. nul sur $[-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]$, c'est-à-dire dès que f n'y est pas constante. Il n'est donc pas utile de considérer de telles fonctions dans le supremum définissant $A(\mu, \widetilde{\nu})$ et par suite aussi dans celui définissant $A(\mu, \nu)$.

Par ailleurs, remarquons que de manière générale, si μ et ν sont symétriques par rapport à 0, on a

$$A(\mu, \nu) \;=\; \sup_{f \in \mathcal{C}_\mathrm{i}} \frac{\mathrm{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]}$$

où $\mathcal{C}_\mathrm{i}$ est l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{C}$. En effet, décomposons $f \in \mathcal{C}$ en ses parties impaires et paires définies par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} \widetilde{f}(x) &=& (f(x) - f(-x))/2 \\ \widehat{f}(x) &=& (f(x) + f(-x))/2 \end{cases}$$

Pour $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ (on pourrait se restreindre dans la définition de la constante de Poincaré à des fonctions bornées), on calcule que

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\widetilde{f}, \widehat{f}) &= \mu[\widehat{f}(\widetilde{f} - \mu[\widetilde{f}])] \\ &= \mu[\widehat{f}\widetilde{f}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

du fait que $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}\widetilde{f}$ sont impaires et que par symétrie de μ, pour toute fonction impaire g, on a $\mu[g] = 0$. Il apparaît ainsi que

$$\mathrm{Var}(f) \;=\; \mathrm{Var}(\widetilde{f}) + \mathrm{Var}(\widehat{f})$$

De même, on obtient que $\nu[\widetilde{f}'\widehat{f}'] = 0$, d'où $\nu[(f')^2] = \nu[(\widetilde{f}')^2] + \nu[(\widehat{f}')^2]$. Il en découle que

$$A(\mu, \nu) \;\leq\; \max\left(\sup_{f \in \mathcal{C}_\mathrm{i}} \frac{\mathrm{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]}, \sup_{f \in \mathcal{C}_\mathrm{p}} \frac{\mathrm{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]} \right)$$

où $\mathcal{C}_\mathrm{p}$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ qui sont paires.
Remarquons qu'en désignant par $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions absolument continues sur $\mathbb{R}_+$ et en posant $\mu_+ \coloneqq (\mu(\{0\})/2)\delta_0 + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} \cdot \mu$ et $\nu_+ \coloneqq \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} \cdot \nu$ (si g est une fonction positive, on note $g \cdot \mu$ la mesure admettant g pour densité par rapport à μ), on a par symétrie,

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathcal{C}_\mathrm{i}} \frac{\mathrm{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]} &= \sup_{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)} \frac{\mu_+[f^2]}{\nu_+[(f')^2]} \\ \sup_{f \in \mathcal{C}_\mathrm{p}} \frac{\mathrm{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]} &= \sup_{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)} \frac{\mu_+[(f - 2\mu_+[f])^2]}{\nu_+[(f')^2]} \end{aligned}$$

or pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, on constate que

$$\begin{aligned} \mu_+[(f - 2\mu_+[f])^2] &= \mu_+[f^2] - 4(\mu_+[f])^2 + 4(\mu_+[f])^2\mu_+(\mathbb{1}) \\ &= \mu_+[f^2] - 2(\mu_+[f])^2 \\ &\leq \mu_+[f^2] \end{aligned}$$

d'où en fin de compte

$$A(\mu,\nu) \ \le \ \sup_{f\in\mathcal{C}_{\mathrm{i}}} \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{\nu[(f')^2]} \ \le \ A(\mu,\nu)$$

L'égalité de ces termes combinée à la première partie de la preuve permet de se convaincre qu'il suffit de considérer dans le supremum de définition de $A(\mu,\nu)$ des fonctions impaires qui s'annulent sur $[-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]$.

■

Posons pour tout $0<\eta<1/2$, $\mathcal{F}_+(\eta)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ qui s'annulent sur $]-\infty, M_\mu(\eta)]$. En considérant les restrictions des fonctions à $\mathbb{R}_+$, la preuve précédente montre que

$$\begin{aligned} A(\mu,\nu) &= \sup_{f\in\mathcal{F}_+(\eta)} \frac{\mu[f^2]}{\nu[(f')^2]} \\ &= \sup_{f\in\mathcal{F}_+(\eta)} \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{\nu[(f')^2]} \end{aligned}$$

Evidemment on dispose d'un résultat symétrique en $-M_\mu^+$.
En particulier, toujours sous les conditions du lemme précédent, on a

$$A(\mu,\nu) \ = \ \lim_{\eta\to 0_+} \sup_{f\in\mathcal{F}_+(\eta)} \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

et il suffit donc de se placer au voisinage de M_μ^+ pour calculer $A(\mu,\nu)$. Cette propriété, qui résulte directement de la proposition 2, jouera un rôle important dans la suite du papier.
Pour une interprétation heuristique plus probabiliste, supposons que l'on puisse associer un processus de Markov à la forme de Dirichlet symétrique obtenue par restriction naturelle de $\mathbb{L}^2(\mu)\cap\mathcal{C} \ni f \mapsto \nu[(f')^2] \in \bar{\mathbb{R}}_+$ (ce qui peut être effectué dans des cas suffisamment réguliers, voir par exemple le livre [5] de Fukushima, Ōshima et Takeda), les “points” $-M_\mu^+$ et M_μ^+ seront alors parmi ceux qui retardent le plus sa convergence $\mathbb{L}^2$ à l'équilibre μ.

3 Inégalités de Poincaré non symétriques

On va étendre la condition asymptotique de calcul de la constante de Poincaré vue dans la section précédente au cas général d'une probabilité μ et d'une mesure ν sur la droite.

On reprend les notations M_μ^- et M_μ^+ de l'introduction et m désignera un élément fixé de $]M_\mu^-, M_\mu^+[$. On s'intéresse ensuite aux fonctions $b^-_{\mu,\nu,m}$ et $b^+_{\mu,\nu,m}$ définies respectivement sur $]M_\mu^-, m]$ et $[m, M_\mu^+[$ par

$$\begin{aligned} \forall\ M_\mu^- < x \le m, \qquad b^-_{\mu,\nu,m}(x) &:= \int_x^m \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \mu(]-\infty, x]) \\ \forall\ m \le x < M_\mu^+, \qquad b^+_{\mu,\nu,m}(x) &:= \int_m^x \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \mu([x,+\infty[) \end{aligned}$$

qui nous conduisent à la quantité

$$B(\mu,\nu,m) \ := \ \max\left(\sup_{M_\mu^- < x \le m} b^-_{\mu,\nu,m}(x), \sup_{m\le x < M_\mu^+} b^+_{\mu,\nu,m}(x) \right)$$

Le résultat suivant est bien connu et dû à Bobkov et Götze [3], qui n'avaient considéré que le cas où m est une médiane, mais leur preuve s'étend immédiatement au cas général.

Théorème 5 *Quelque soit le choix de $m \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$, on a $A(\mu,\nu) \le 4B(\mu,\nu,m)$.*

Notons $\mathcal{C}_m$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}$ telles que $f(m) = 0$, Bobkov et Götze commencent par constater que

$$\begin{aligned} A(\mu,\nu) &= \sup_{f\in\mathcal{C}_m} \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{\nu[(f')^2]} \\ &\le \sup_{f\in\mathcal{C}_m} \frac{\mu[f^2]}{\nu[(f')^2]} \\ &= \sup_{f\in\mathcal{C}_m} \frac{\mu_-[f_-^2] + \mu_+[f_+^2]}{\nu_-[(f_-')^2] + \nu_+[(f_+')^2]} \\ &\le \max\left(\sup_{f\in\mathcal{C}_m} \frac{\mu_-[f_-^2]}{\nu_-[(f_-')^2]}, \sup_{f\in\mathcal{C}_m} \frac{\mu_+[f_+^2]}{\nu_+[(f_+')^2]}\right) \end{aligned}$$

avec $\mu_- := (\mu(\{m\})/2)\delta_m + \mathbb{1}_{]-\infty,m[} \cdot \mu$, $\mu_+ := \mu - \mu_-$, $\nu_- := \mathbb{1}_{]-\infty,m[} \cdot \nu$, $\nu_+ := \mathbb{1}_{]m,+\infty[} \cdot \nu$, $f_- := \mathbb{1}_{]-\infty,m[}f$ et $f_+ := \mathbb{1}_{]m,+\infty[}f$. Le résultat voulu découle ensuite de l'application aux couples (μ_-,ν_-) et (μ_+,ν_+) de l'inégalité de Hardy présentée par Muckenhoupt [11].

De manière alternative, on pourrait se ramener à la situation symétrique (auquel cas le théorème 5 peut également être obtenu comme une conséquence de la proposition 3, voir [9]), en symétrisant μ_-, μ_+, ν_- et ν_+ par rapport à m, en normalisant μ_- et μ_+ et en tenant compte du fait (mentionné dans la section précédente) que dans les situations symétriques, on peut se contenter de considérer des fonctions impaires par rapport au point de symétrie dans le domaine du supremum de la constante de Poincaré. Cette réduction au cas symétrique sera utilisée dans la preuve de la

Proposition 6 *Supposons, soit que $\mu(\{M_\mu^-\}) = 0$ et $B(\mu,\nu,m) = \lim_{x\to M_\mu^-+} b^-_{\mu,\nu,m}(x)$, soit que $\mu(\{M_\mu^+\}) = 0$ et $B(\mu,\nu,m) = \lim_{x\to M_\mu^+-} b^+_{\mu,\nu,m}(x)$. La borne du théorème précédent est alors atteinte :*

$$A(\mu,\nu) = 4B(\mu,\nu,m)$$

Preuve

Par symétrie, il suffit de traiter le cas de la deuxième hypothèse. Notons $\widetilde{\mu}_+$ le résultat des opérations envisagées sur μ_+ avant l'énoncé ci-dessus ; avec S la symétrie par rapport à m, on a

$$\widetilde{\mu}_+ := \frac{\mu_+ + S(\mu_+)}{2\mu_+([m,+\infty[)}$$

Soit également $\widetilde{\nu}_+ := \nu_+ + S(\nu_+)$.

L'hypothèse de la proposition implique que

$$\begin{aligned} B(\widetilde{\mu}_+,\widetilde{\nu}_+,m) &= \lim_{x\to M^+_{\widetilde{\mu}_+}-} b_{\widetilde{\mu}_+,\widetilde{\nu}_+,m}(x) \\ &= \frac{1}{2\mu([m,+\infty[)} \lim_{x\to M_\mu^+-} b_{\mu,\nu,m}(x) \\ &= \frac{B(\mu,\nu,m)}{2\mu([m,+\infty[)} \end{aligned}$$

ainsi d'après la section précédente, on a

$$\begin{aligned} A(\widetilde{\mu}_+,\widetilde{\nu}_+) &= 4B(\widetilde{\mu}_+,\widetilde{\nu}_+,m) \\ &= \lim_{\eta\to 0_+} \sup_{f\in\mathcal{F}_+(\eta)} \frac{\widetilde{\mu}_+[f^2]}{\widetilde{\nu}_+[(f')^2]} \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_+(\eta)$ est l'ensemble des fonctions qui s'annulent sur $]-\infty, M_\mu^+(\eta)]$, pour $0<\eta<1/2$, avec $M_\mu^+(\eta) \coloneqq \inf\{x \in \mathbb{R} \,:\, \mu(]-\infty,x]) > 1-\eta\}$ (a priori il aurait fallu remplacer $M_\mu^+(\eta)$ par $M_{\widetilde{\mu}_+}^+(\eta)$, mais cela ne change rien à la limite quand η tend vers 0_+).
Remarquons que pour $0<\eta<1/2$ et $f \in \mathcal{F}_+(\eta)$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(\mu[f])^2 \;\leq\; \mu[\{f \neq 0\}]\mu[f^2] \;\leq\; \eta\mu[f^2]$$

d'où $\mathrm{Var}(f,\mu) \geq (1-\eta)\mu[f^2]$. Cependant, pour $0<\eta<\mu([m,+\infty[)$ et $f \in \mathcal{F}_+(\eta)$, on a $\mu[f^2] = \mu_+[f^2] = 2\mu([m,+\infty[)\widetilde{\mu}_+[f^2]$ et on dispose aussi de $\nu[(f')^2] = \widetilde{\nu}_+[(f')^2]$. Ainsi en prenant le supremum sur de telles fonctions et en passant à la limite quand η tend vers 0_+, on se convainc que

$$\begin{aligned} A(\mu,\nu) &\geq 2\mu([m,+\infty[)A(\widetilde{\mu}_+,\widetilde{\nu}_+) \\ &= 8\mu([m,+\infty[)B(\widetilde{\mu}_+,\widetilde{\nu}_+,m) \\ &= 4B(\mu,\nu,m) \end{aligned}$$

Le théorème 5 nous permet ensuite de conclure à l'égalité escomptée.

■

Comme pour le cas de la constante de Sobolev logarithmique présenté dans l'introduction, le choix de $m \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$ est souvent crucial pour appliquer cette proposition. Il faut évidemment chercher celui qui minimise la quantité $B(\mu,\nu,m)$. Remarquons également que même si μ est symétrique, ce meilleur m n'est pas forcément la médiane de μ. Ainsi considérons l'exemple où μ est la distribution exponentielle symétrisée et où ν est construit de sorte que $b_{\mu,\nu,1}^+$ vaut 1 sur $[2,+\infty[$ et est strictement croissant sur $[1,2[$ (avec $b_{\mu,\nu,1}^+(1)=0$), $b_{\mu,\nu,1}^-$ vaut 1 sur $]-\infty,0]$ et est strictement décroissant sur $]0,1]$ (avec $b_{\mu,\nu,1}^-(1)=0$). La proposition 6 s'applique alors uniquement avec $m=1$, puisque pour $m \neq 1$, on vérifie sans difficulté que $B(\mu,\nu,m) > B(\mu,\nu,1)$. On obtient pour cet exemple $A(\mu,\nu)=4$.

4 Majoration de la constante de Sobolev logarithmique

Nous présentons ici une majoration valable sans hypothèse (de type asymptotique), comparable au théorème 5 pour la constante de Poincaré. En reprenant les notations de l'introduction, notre objectif est donc de démontrer la

Proposition 7 *Pour toute probabilité μ, toute mesure ν et tout $m \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$, on a*

$$C(\mu,\nu) \;\leq\; 4D(\mu,\nu,m)$$

La preuve de cette inégalité va nécessiter les deux résultats techniques suivants.

Lemme 8 *La fonction Φ définie dans l'introduction est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

Preuve

Considérons d'abord la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall\, t \geq 0, \qquad \Psi(t) \;\coloneqq\; \frac{t\ln(t)}{t-1}$$

(avec la convention $\Psi(1)=1$, ce qui correspond au prolongement par continuité en 1). On calcule que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad \Psi''(t) \;=\; \frac{\varphi(t)}{(t-1)^3}$$

avec

$$\forall\, t > 0, \qquad \varphi(t) = -t + \frac{1}{t} + 2\ln(t)$$

Une dérivation nous donne que φ est strictement décroissante, car

$$\forall\, t > 0, \qquad \varphi'(t) \;=\; -\frac{(t-1)^2}{t^2}$$

Comme $\varphi(1) = 0$, pour $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\varphi(t)$ est du signe de $1-t$ et par suite $\Psi''(t)$ est négatif. Pour obtenir la concavité de Ψ, il suffit donc de vérifier que Ψ' peut être prolongé par continuité en 1, ce qui est bien le cas puisque

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad \Psi'(t) \;=\; \frac{1}{t-1} - \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$$

qui admet $1/2$ pour limite en 1.
Notons que $\lim_{t\to+\infty} \Psi'(t) = 0$ ainsi Ψ' est valeurs positives et est décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ceci permet de conclure que Φ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, car

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \Phi(t) \;=\; 2\Psi(\sqrt{t})$$

ainsi

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \Phi'(t) \;=\; \frac{\Psi'(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

(avec $\Phi'(1) = \Psi'(1) = 1/2$), d'où il ressort que Φ' est décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$.

■

Une autre étude de fonction permet de voir que l'application $[0,1] \ni t \mapsto t\Phi(1/t)$ est croissante, fait que nous avons utilisé dans un exemple de l'introduction.

On cherche ensuite à réduire le domaine sur lequel est pris le supremum dans la définition de $C(\mu,\nu)$. Quitte à écrêter les fonctions par des valeurs de plus en plus grandes, on peut les prendre bornées, car l'entropie et l'énergie s'approchent bien sous cette procédure. Puis par homogènéité, il est possible d'imposer que $\mu[f^2] = 1$. On va introduire une condition supplémentaire obtenue par optimisation d'une constante additive.

Lemme 9 *Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{C}$ qui vérifient $\mu[f^2] = 1$ et $\mu[f\ln(f^2)] = 0$. On a alors*

$$C(\mu,\nu) \;=\; \sup_{f\in\mathcal{B}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

Preuve
Soit $f \in \mathcal{C}$ bornée et satisfaisant $\nu[(f')^2] < +\infty$, on définit

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F(t) \;\coloneqq\; \mathrm{Ent}((f+t)^2,\mu)$$

Il est bien connu (voir par exemple le livre de Ané et al. [1]) que

$$\lim_{|t|\to+\infty} F(t) \;=\; 2\,\mathrm{Var}(f,\mu)$$

On vérifie que l'application F est dérivable partout et on calcule que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F'(t) \;=\; 2\mu\left[(f+t)\ln\left(\frac{(f+t)^2}{\mu[(f+t)^2]}\right)\right]$$

En effectuant un développement limité pour $|t|$ grand, on obtient que

$$F'(t) = -\frac{1}{3t^2}\mu[(f-\mu[f])^3] + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi si $\mu[(f-\mu[f])^3] \neq 0$, par exemple si $\mu[(f-\mu[f])^3] > 0$, alors en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) $F(t)$ tend vers $2\mathrm{Var}(f,\mu)$ par valeurs strictement supérieures (resp. inférieures). Par dérivabilité de F, ceci implique qu'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $F(T) = \max_{\mathbb{R}} F$ et $F'(T) = 0$. On en déduit notamment que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]} &\leq \frac{\mathrm{Ent}((f+T)^2,\mu)}{\nu[((f+T)')^2]} \\ \mu\left[(f+T)\ln\left(\frac{(f+T)^2}{\mu[(f+T)^2]}\right)\right] &= 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $\mu[(f-\mu[f])^3] = 0$ et du moins si μ n'est pas une masse de Dirac (dans ce dernier cas l'égalité du lemme ci-dessus est triviale), on vérifie sans difficulté, par un calcul variationnel autour de f pour la fonctionnelle $g \mapsto \mu[(g-\mu[g])^3]$, qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}$ qui approchent f au sens où

$$\lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|_\infty + \sqrt{\nu[(f'-f_n')^2]} = 0$$

et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu[(f-\mu[f])^3] \neq 0$. On se ramène ainsi à la situation précédente, ce qui permet d'obtenir que

$$C(\mu,\nu) = \sup_{f\in\widetilde{\mathcal{B}}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

avec $\widetilde{\mathcal{B}}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{C}$ qui vérifient $\mu[f\ln(f^2/\mu[f^2])] = 0$. Le résultat annoncé en découle par homogénéité.

■

Il existe d'autres réductions possibles du domaine sur lequel est pris le supremum pour la constante de Sobolev logarithmique. Le plus connu consiste à ne considérer que des fonctions positives, du fait que pour $f \in \mathcal{C}$ donné, on a λ-p.p. $|f'| \geq \left||f|'\right|$. Dans [10], on a aussi vu que l'on pouvait se contenter de fonctions monotones. Mais ces restrictions ne seront pas utiles ici et nous disposons désormais de tous les ingrédients nécessaires à la

Preuve de la proposition 7

Soit $f \in \mathcal{B}$, on pose $g = \Phi(f^2)$ qui est une fonction à valeurs positives. Elle ne peut être nulle μ-p.s. que si f l'est aussi, ce qui est impossible puisque $\mu[f^2] = 1$. On peut donc considérer la probabilité μ_g définie par $\mu_g = (\mu[g])^{-1} g \cdot \mu$. L'étape principale de la démonstration consiste à observer que

$$\mathrm{Ent}(f^2,\mu) = \mu[g]\mathrm{Var}(f,\mu_g)$$

En effet, en intégrant l'égalité

$$g(f-1) = f\ln(f^2) \tag{1}$$

il apparaît que $\mu[g](\mu_g[f]-1) = 0$ d'où $\mu_g[f] = 1$. En multipliant alors l'équation (1) par f puis en intégrant par rapport à μ, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}(f^2,\mu) &= \mu[g]\mu_g[f(f-1)] \\ &= \mu[g]\mu_g[(f-1)^2] \\ &= \mu[g]\mathrm{Var}(f,\mu_g) \end{aligned}$$

Cependant d'après le théorème 5, on a pour tout $m \in]M_{\mu_g}^-, M_{\mu_g}^+[$,

$$\mathrm{Var}(f, \mu_g) \quad \leq \quad 4B(\mu_g, \nu, m)\nu[(f')^2]$$

Or par définition de $B_+(\mu_g, \nu, m)$, il apparaît que

$$\begin{aligned} \mu[g]B_+(\mu_g, \nu, m) &= \sup_{m \leq x < M_{\mu_g}^+} \int_m^x \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \mu[g]\mu_g([x, +\infty[) \\ &= \sup_{m \leq x < M_{\mu_g}^+} \int_m^x \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \mu[\Phi(f^2)\mathbb{1}_{[x,+\infty[}] \end{aligned}$$

Ceci amène à s'intéresser à $\mu[\Phi(f^2)\mathbb{1}_{[x,+\infty[})$, par exemple pour $x < M_\mu^+$ donné. On utilise alors l'inégalité de Jensen pour les fonctions concaves pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\mu[\Phi(f^2)\mathbb{1}_{[x,+\infty[}]}{\mu([x, +\infty[)} &\leq \Phi\left(\frac{\mu[f^2\mathbb{1}_{[x,+\infty[}]}{\mu([x, +\infty[)}\right) \\ &\leq \Phi\left(\frac{1}{\mu([x, +\infty[)}\right) \end{aligned}$$

où l'on a tenu compte de l'inégalité $\mu[f^2\mathbb{1}_{[x,+\infty[}] \leq \mu[f^2] = 1$ et de la croissance de Φ également vue dans la preuve du lemme 8.
Par conséquence, on a montré que

$$\mu[g]B_+(\mu_g, \nu, m) \quad \leq \quad D_+(\mu, \nu, m)$$

et comme on dispose d'une inégalité analogue à gauche de m, il en découle que $\mu[g]B(\mu_g, \nu, m) \leq D(\mu, \nu, m)$ puis que

$$\mathrm{Ent}(f^2, \mu) \quad \leq \quad 4D(\mu, \nu, m)\nu[(f')^2]$$

Le résultat voulu s'en suivrait, si ceci était valable pour tout $f \in \mathcal{B}$ et tout $m \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$, mais nous ne l'avons prouvé que sous la restriction que $m \in]M_{\mu_g}^-, M_{\mu_g}^+[$. On peut contourner cette maladresse technique de deux manières différentes. D'une part en notant que le théorème 5 est également valable pour $m \in \mathbb{R}$ quelconque, comme on peut s'en convaincre par la preuve rappelée (en pratique les cas où $m \notin]M_\mu^-, M_\mu^+[$ ne sont pas intéressants, car ils conduisent à des constantes $B(\mu, \nu, m)$ plus mauvaises que celles obtenues pour $m \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$). D'autre part, on pourrait également tirer parti du fait que l'ensemble $\widehat{\mathcal{B}}$ des fonctions $f \in \mathcal{B}$ satisfaisant $M_{f^2\cdot\mu}^- = M_\mu^-$ et $M_{f^2\cdot\mu}^+ = M_\mu^+$ (vérifiant par conséquent $M_{\mu_{\Phi(f^2)}}^- = M_\mu^-$ et $M_{\mu_{\Phi(f^2)}}^+ = M_\mu^+$) est suffisament dense dans $\mathcal{B}$ pour le calcul de $C(\mu, \nu)$, au sens où

$$C(\mu, \nu) \quad = \quad \sup_{f \in \widehat{\mathcal{B}}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2, \mu)}{\nu[(f')^2]}$$

■

Dans la preuve précédente, l'utilisation de la fonction $g = \Phi(f^2)$ peut sembler étrange a priori. Pour terminer cette section, nous allons la justifier heuristiquement, en espérant que cette approche pourra s'étendre à certaines inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées. La démarche consiste à se ramener aux inégalités de Poincaré, mieux comprises, et donc de tenter de comparer l'entropie à une variance. On cherche ainsi une densité g par rapport à la probabilité μ telle que

$$\forall\ f \in \mathbb{L}^2(g \cdot \mu), \qquad \mathrm{Ent}(f^2, \mu) \quad \leq \quad \mathrm{Var}(f, g \cdot \mu) \tag{2}$$

Cette inégalité est aussi de Sobolev logarithmique, mais pas du genre considéré ici, car "la structure de plus proches voisins sur $\mathbb{R}$" ne se retrouve pas dans l'énergie $\mathrm{Var}(f, g\cdot\mu)$, qui est plutôt de type "champ moyen". En général une telle inégalité n'est pas satisfaite, notamment elle ne l'est jamais si μ est diffuse (pour s'en convaincre il suffit de considérer des indicatrices d'ensembles mesurables de masses de plus en plus petites pour μ et inclus dans $\{g \leq 2\}$). Mais elle le sera si μ est une combinaison convexe finie de masses de Dirac. Plaçons-nous dans cette situation et supposons de plus qu'il existe une fonction maximisante f pour (2), pour laquelle 1 est effectivement la constante de Sobolev logarithmique associée. Par un calcul variationnel, on montre qu'elle satisfait

$$f \ln\left(\frac{f^2}{\mu[f^2]}\right) \;=\; (f-\mu[gf])g$$

Si l'on a pris soin de choisir $g > 0$, de normaliser f par $\mu[f^2] = 1$ et s'il existe x tel que $f^2(x) = 1$, on obtient alors $\mu[gf] = 1$ et l'on retrouve la relation $g = \Phi(f^2)$. Or à $f \in \mathcal{C}$ fixé, il est assez naturel de chercher g dépendant de f tel que f soit maximisant dans (2), d'où l'introduction de $g = \Phi(f^2)$. Ensuite il est souvent possible d'étendre des résultats tels que la proposition 7 obtenue pour des probabilités μ de support fini au cas général à l'aide de propriétés de continuité de $C(\mu,\nu)$ en la variable μ (voir par exemple [9], où cela a été effectué pour la constante de Poincaré $A(\mu,\nu)$ en introduisant séparément des convergences adéquates en μ et ν). Une justification alternative des considérations ci-dessus dans le cas général consisterait à ne s'intéresser à (2) que pour des fonctions f monotones (ce qui permet de réintroduire "l'ordre de $\mathbb{R}$" dans cette inégalité, qui est alors beaucoup plus facile à satisfaire), puisque l'on sait d'après [10] que l'on peut se restreindre à de telles fonctions pour le calcul de constantes de Sobolev logarithmique du type $C(\mu,\nu)$.

5 Minoration de la constante de Sobolev logarithmique

Nous allons maintenant vérifier que sous la condition asymptotique donnée dans le théorème 1 (que l'on supposera remplie en M_μ^+), la borne obtenue dans la section précédente est atteinte, ce qui terminera la preuve de ce théorème 1.

A nouveau l'argument sous-jacent va consister à se ramener au cas de la constante de Poincaré. Supposons μ, ν et m fixés comme dans l'énoncé du théorème 1. On construit une nouvelle probabilité $\widetilde{\mu}$ de la manière suivante. On commence par poser

$$\forall\, x \geq m, \qquad \widetilde{\mu}([x,+\infty[) \;:=\; \left(\mu([x,+\infty[)\Phi\left(\frac{1}{\mu([x,+\infty[)}\right)\right)\wedge 1$$

ce qui définit bien une mesure sur les boréliens de $[m,+\infty[$, car l'application

$$\Psi \,:\,]0,1] \ni u \;\mapsto\; u\Phi(1/u) \tag{3}$$

est strictement croissante et continue. On prolonge par continuité cette fonction en 0 en posant $\Psi(0) = 0$. Pour compléter la sous-probabilité obtenue sur $([m,+\infty[, \mathcal{R}\cap[m,+\infty[)$ en une probabilité $\widetilde{\mu}$ sur $(\mathbb{R},\mathcal{R})$, soit $a = (1-\widetilde{\mu}([m,+\infty[))/\mu(]-\infty,m[)$ et imposons que $\widetilde{\mu}$ soit égal à $a\mu$ sur $]-\infty,m[$. On remarque déjà que $M_{\widetilde{\mu}}^+ = M_\mu^+$, par contre l'égalité $M_{\widetilde{\mu}}^- = M_\mu^-$ est équivalente à $a > 0$, mais celle-ci ne sera ni toujours vérifiée, ni importante. L'intérêt principal de $\widetilde{\mu}$ provient du

Lemme 10 *Sous l'hypothèse du théorème 1 en M_μ^+, on est assuré de*

$$A(\widetilde{\mu},\nu) \;=\; 4\,B(\widetilde{\mu},\nu,m) \;=\; 4\,D(\mu,\nu,m)$$

Preuve

La démonstration du lemme 8 permet de voir que Φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (ne serait-ce que parce qu'elle est concave et que sa dérivée tend vers 0 en $+\infty$), ainsi pour tout $u \in [0,1]$, on a $\Psi(u) \geq \Phi(1)u = 2u$. Il en découle notamment que $a \leq 1$ puis que

$$\begin{array}{rcl} B_-(\widetilde{\mu},\nu,m) & \coloneqq & \sup_{x<m} \int_x^m \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \widetilde{\mu}(]-\infty,x]) \\ & \leq & \sup_{x<m} \int_x^m \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \mu(]-\infty,x]) \\ & \leq & \frac{1}{2} \sup_{x<m} \int_x^m \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \mu(]-\infty,x])\Phi\left(\frac{1}{\mu(]-\infty,x])}\right) \\ & = & \frac{1}{2} D_-(\mu,\nu,m) \end{array}$$

De manière plus immédiate encore, on a

$$\begin{array}{rcl} B_+(\widetilde{\mu},\nu,m) & \coloneqq & \sup_{x>m} \int_m^x \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \widetilde{\mu}([x,+\infty[) \\ & \leq & D_+(\mu,\nu,m) \end{array}$$

et du fait que par hypothèse le suprémum est approché pour x tendant vers $(M_\mu^+)_-$, on est assuré de l'égalité $B_+(\widetilde{\mu},\nu,m) = D_+(\mu,\nu,m)$. Puisque l'on a aussi $D(\mu,\nu,m) = D_+(\mu,\nu,m) \geq D_-(\mu,\nu,m)$, on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} B(\widetilde{\mu},\nu,m) & = & B_-(\widetilde{\mu},\nu,m) \vee B_+(\widetilde{\mu},\nu,m) \\ & = & D(\mu,\nu,m) \end{array}$$

De plus le suprémum apparaissant dans $B(\widetilde{\mu},\nu,m)$ est notamment approché en $M_{\widetilde{\mu}}^+-$, ce qui nous place dans le contexte de la proposition 6, pour obtenir que $A(\widetilde{\mu},\nu) = 4B(\widetilde{\mu},\nu,m)$.

■

Pour prouver le théorème 1, il reste à se convaincre que

$$A(\widetilde{\mu},\nu) \quad \leq \quad C(\mu,\nu) \tag{4}$$

Pour ceci nous aurons besoin du résultat technique suivant pour lequel on commence par remarquer que $\widetilde{\mu}$ est absolument continu par rapport à μ. En effet, ceci provient de la formule de changement de variable dans l'intégrale de Stieltjes (voir par exemple la formule (92.1) de l'ouvrage [4] de Dellacherie et Meyer) et la densité $\varphi \coloneqq d\widetilde{\mu}/d\mu$ est donnée explicitement par

$$\forall\, x \in]M_\mu^-, M_\mu^+[, \qquad \varphi(x) \quad = \quad \begin{cases} a & \text{, si } x < m \\ \Psi'(\mu([x,+\infty[)) & \text{, si } x \in [m, M_\mu^+[\setminus \mathcal{D} \\ \dfrac{\Psi(\mu([x,+\infty[)) - \Psi(\mu(]x,+\infty[))}{\mu(\{x\})} & \text{, si } x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

où $\mathcal{D} \coloneqq \{x \in [m, M_\mu^+[:\ \mu(\{x\}) > 0\}$ est le lieu des masses de Dirac incluses dans μ restreint à $[m, M_\mu^+[$. On dispose alors de l'estimée suivante.

Lemme 11 *Pour tout* $0 < \epsilon < 1$, *on a*

$$\int \exp((1-\epsilon)\varphi)\, d\mu \quad < \quad +\infty$$

Preuve

On peut évidemment se contenter de considérer l'intégrale ci-dessus sur $[m,+\infty[$ et le résultat annoncé découle de l'existence d'une constante universelle $0 < c < +\infty$ telle que pour tout $x > m$,

$$\int_{[m,x[} \exp((1-\epsilon)\varphi)\, d\mu \quad \leq \quad \frac{\exp(c(1-\epsilon))}{\epsilon}(\mu^\epsilon([m,+\infty[) - \mu^\epsilon([x,+\infty[))$$

Par la formule de changement de variable dans l'intégrale de Stieltjes, il suffit pour cela de se convaincre que

$$\begin{array}{rrcl} & \forall\ 0<u<1, \quad \exp((1-\epsilon)\Psi'(u)) & \leq & \exp(c(1-\epsilon))u^{\epsilon-1} \\ \forall\ 0<u<v<1, & (v-u)\exp\left((1-\epsilon)\dfrac{\Psi(v)-\Psi(u)}{v-u}\right) & \leq & \dfrac{\exp(c(1-\epsilon))}{\epsilon}(v^\epsilon-u^\epsilon) \end{array}$$

En effet, la première (respectivement la seconde) inégalité permet de dominer la partie diffuse (respectivement à saut) de la mesure $\exp((1-\epsilon)\varphi)\cdot d\mu$ par celle de $-\exp(c(1-\epsilon))d\mu^\epsilon([x,+\infty[)$. On remarque qu'il suffirait de prouver la seconde inégalité, la première s'en suivant en considérant "u et v infiniment proches". Pourtant commençons par nous intéresser à la première, car elle sera utile pour la seconde. Elle revient à trouver une constante c finie telle que pour tout $0<u<1$, $\Psi'(u)\leq \ln(1/u)+c$. On calcule que

$$\forall\ 0<u<1, \qquad \Psi'(u) \;=\; \ln\left(\frac{1}{u}\right)+R(u)$$

avec

$$\forall\ 0<u<1, \qquad R(u) \;\coloneqq\; \frac{\sqrt{u}}{2(1-\sqrt{u})^2}\ln\left(\frac{1}{u}\right)-\frac{1}{1-\sqrt{u}}$$

On a clairement $\lim_{u\to 0_+}R(u)=0$ et un développement d'ordre 2 en 1_- montre que $\lim_{u\to 1_-}R(u)=1/2$. Par continuité de R sur $]0,1[$, on en conclut à la finitude de $c\coloneqq\sup_{0<u<1}R(u)$. Traitons maintenant la seconde borne ci-dessus, en écrivant que pour tous $0<u<v<1$,

$$\begin{aligned} \exp\left((1-\epsilon)\frac{\Psi(v)-\Psi(u)}{v-u}\right) &= \exp\left(\frac{(1-\epsilon)}{v-u}\int_u^v \Psi'(s)\,ds\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{(1-\epsilon)}{v-u}\int_u^v c-\ln(s)\,ds\right) \\ &= \exp((1-\epsilon)c)\exp\left(\frac{1}{v-u}\int_u^v \ln(s^{\epsilon-1})\,ds\right) \\ &\leq \exp((1-\epsilon)c)\frac{1}{v-u}\int_u^v s^{\epsilon-1}\,ds \\ &= \frac{\exp((1-\epsilon)c)}{\epsilon}(v^\epsilon-u^\epsilon) \end{aligned}$$

où l'on a tenu compte de l'inégalité précédente et de celle de Jensen pour l'application exponentielle.

■

La preuve de l'inégalité (4) sous l'hypothèse du théorème 1 en M_μ^+ est maintenant assez simple. Pour tout $0<\epsilon<1$ et toute fonction f mesurable et bornée sur $\mathbb{R}$, on écrit que

$$\begin{aligned} (1-\epsilon)\mathrm{Var}(f,\widetilde{\mu}) &\leq (1-\epsilon)\mu[\varphi f^2] \\ &\leq \mathrm{Ent}(f^2,\mu)+K_\epsilon\mu[f^2] \end{aligned}$$

avec

$$K_\epsilon \;\coloneqq\; \ln\left(\int \exp((1-\epsilon)\varphi)\,d\mu\right) \;<\; +\infty$$

Pour $m\leq y<M_\mu^+$, notons $\mathcal{F}(y)$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{C}$ qui sont nulles sur $]-\infty,y]$, d'après les preuves de la proposition 6 et du lemme 10, on sait que

$$A(\widetilde{\mu},\nu) \;=\; \sup_{f\in\mathcal{F}(y)}\frac{\mathrm{Var}(f,\widetilde{\mu})}{\nu[(f')^2]}$$

Ainsi il apparaît que pour tout $0 < \epsilon < 1$ et tout $m \leq y < M_\mu^+$,

$$(1-\epsilon)A(\widetilde{\mu},\nu) \quad \leq \quad C(\mu,\nu) + K_\epsilon \sup_{f\in\mathcal{F}(y)} \frac{\mu[f^2]}{\nu[(f')^2]} \tag{5}$$

Cependant les inégalités de Hardy présentées par Muckenhoupt [11] montrent que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}(y)} \frac{\mu[f^2]}{\nu[(f')^2]} \quad \leq \quad 4 \sup_{y<x<M_\mu^+} \int_y^x \frac{1}{\nu}\, d\lambda\, \mu([x, M_\mu^+[)$$

expression qui tend vers 0 quand y s'approche de M_μ^+ par valeurs inférieures, du moins sous l'hypothèse que $D(\mu,\nu,m) < +\infty$. Mais si $D(\mu,\nu,m) = +\infty$, (4) est une égalité qui découle directement du lemme 10, d'ailleurs dans cette situation le théorème 1 est valable sans condition de type asymptotique, comme on peut le voir à partir des estimées de Bobkov et Götze [3] ou de Barthe et Roberto [2] rappelées dans l'introduction. Pour la fin de cette section, plaçons-nous donc de plus sous la condition que $D(\mu,\nu,m) < +\infty$, qui implique, en passant à la limite dans (5) quand y tend vers $(M_\mu^+)_-$, que pour tout $0 < \epsilon < 1$ on est assuré de

$$(1-\epsilon)A(\widetilde{\mu},\nu) \quad \leq \quad C(\mu,\nu)$$

Le résultat annoncé s'obtient ensuite en faisant tendre ϵ vers 0_+.

Remarquons que les arguments ci-dessus montrent plus précisément que

$$A(\widetilde{\mu},\nu) \quad \leq \quad \lim_{y\to(M_\mu^+)_-} \sup_{f\in\mathcal{F}(y)} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

d'où en fait aussi

$$C(\mu,\nu) \quad = \quad \lim_{y\to(M_\mu^+)_-} \sup_{f\in\mathcal{F}(y)} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

si la condition donnée dans le théorème 1 est vérifiée en M_μ^+. On est à nouveau en présence d'une situation où la constante de Sobolev logarithmique est notamment dictée par le comportement de μ et ν au voisinage (inférieur) de M_μ^+. Mais cela ne signifie pas que les autres points du support de μ ne jouent aucun rôle, comme nous allons le voir dans la section suivante.

6 Contre-exemple de la distribution gaussienne

L'exemple le plus célèbre d'inégalité de Sobolev logarithmique est celui de la distribution gaussienne standard γ, Gross [6] ayant été le premier à montrer que $C(\gamma,\gamma) = 2$. Nous allons constater ici que cette égalité ne peut pas se déduire du théorème 1 sous sa forme actuelle, bien que nous pensions qu'il devrait être possible de l'affiner pour rendre compte de ce résultat.

En effet, il est bien connu que pour x grand,

$$\gamma([x,+\infty[) \quad \sim \quad \frac{\exp(-x^2/2)}{x\sqrt{2\pi}}$$

et que

$$\int_0^x \frac{1}{\gamma}\, d\lambda \quad \sim \quad \frac{\sqrt{2\pi}\exp(x^2/2)}{x}$$

Il en découle aisément que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{\gamma}\, d\lambda\, \gamma([x,+\infty[)\Phi(1/\gamma([x,+\infty[)) \quad = \quad \frac{1}{2} \tag{6}$$

Ainsi si l'on savait que $D(\gamma,\gamma,0)$ est "atteint en l'infini", c'est-à-dire si l'on avait

$$D(\gamma,\gamma,0) \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{\gamma}\, d\lambda\, \gamma([x,+\infty[)\Phi(1/\gamma([x,+\infty[))$$

on retrouverait que $C(\gamma,\gamma) = 2 = 4D(\gamma,\gamma,0)$.
Malheureusement, un développement limité plus précis montre que la limite (6) est approchée par valeurs supérieures et l'égalité ci-dessus n'est donc pas vérifiée. Toutefois, nous imaginons que ceci provient du fait que l'application Φ n'est pas assez fine : il existerait une fonction $\widetilde{\Psi}\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}_+$ plus petite que $\Psi\,:\,[0,1]\ni u\mapsto u\Phi(1/u)$, telle que le théorème 1 reste valable si l'on remplace dans son énoncé toutes les apparitions de Ψ par $\widetilde{\Psi}$ et telle que le critère asymptotique correspondant soit satisfait avec $(\mu,\nu,m)=(\gamma,\gamma,0)$.
Ces propriétés déterminent en fait $\widetilde{\Psi}$ (sur $[0,1/2]$), car nécessairement on aura

$$\forall\; x>0, \qquad \int_0^x \frac{1}{\gamma}\, d\lambda\, \widetilde{\Psi}(\gamma([x,+\infty[)) \quad = \quad \frac{1}{2}$$

En effet, s'il existait un $x>0$ tel que le membre de gauche soit strictement plus petit que $1/2$, alors en perturbant un peu γ au voisinage de x, on obtiendrait des mesures ν telles que le triplet $(\gamma,\nu,0)$ continuerait à vérifier les conditions d'asymptoticité avec la même limite (en $-\infty$ et $+\infty$), d'où $C(\gamma,\nu) = C(\gamma,\gamma)$ pour ces petites perturbations. Mais ceci est interdit par le fait que les applications exponentielles ($\mathbb{R}\ni x\mapsto \exp(\alpha x)$, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}^*$ fixé) sont maximisantes dans la définition de $C(\gamma,\gamma)$ (voir par exemple le livre [1] de Ané et al.), de sorte qu'il existe des petites modifications de γ en ν au voisinage de x qui induisent immédiatement des changements de la constante de Sobolev logarithmique. C'est en ce sens que nous disions à la fin de la section 5 que tous les points de $\mathbb{R}$ contribuent à $C(\gamma,\gamma)$. Remarquons que pour établir que la fonction $\widetilde{\Psi}$ décrite précédemment convient, un résultat analogue à la proposition 3 pour les inégalités de Sobolev logarithmiques pourrait se révéler très éclairant.
La principale raison qui nous incite à conjecturer dans cette direction est que $C(\gamma,\gamma)$ peut effectivement s'obtenir par des calculs asymptotiques, malgré la présence des fonctions maximisantes précédentes. Plus précisément, notons,

$$\forall\; y\in\mathbb{R}, \qquad \mathcal{C}(y) \quad \coloneqq \quad \{f\in\mathcal{C}\,:\, f\equiv 0 \text{ sur }]-\infty,y]\}$$

alors pour tout $y\in\mathbb{R}$, on a

$$C(\gamma,\gamma) \quad = \quad \sup_{f\in\mathcal{C}(y)} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

Ainsi $C(\gamma,\gamma)$ s'obtient aussi "asymptotiquement" comme limite du membre de droite quand y tend vers $+\infty$. Pour se convaincre de l'égalité ci-dessus à $y\in\mathbb{R}$ fixé, il suffit de considérer les fonctions $\mathbb{R}\ni x\mapsto(\exp(\alpha x)-\exp(\alpha y))_+$ avec $\alpha>0$ de plus en plus grand.

7 Situation discrète

Elle correspond aux processus de vie et de mort sur $\mathbb{Z}$. On se donne une probabilité $\widetilde{\mu}$ sur $\mathbb{Z}$ et une mesure $\widetilde{\nu}$ sur l'ensemble de ses arêtes (non orientées) aux plus proches voisins. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{Z}$, sa "dérivée" f' est construite sur l'ensemble de ses arêtes par

$$\forall\; n\in\mathbb{Z}, \qquad f'(\{n,n+1\}) \quad \coloneqq \quad f(n+1)-f(n)$$

Avec ces notations, on cherche à estimer

$$\widetilde{C}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}) \quad = \quad \sup_{f\in\mathbb{L}^2(\widetilde{\mu})} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\widetilde{\mu})}{\widetilde{\nu}[(f')^2]}$$

Soit $m \in \mathbb{Z}$ donné, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{m\}, \qquad \begin{cases} d^-_{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m}(n) &:= \displaystyle\sum_{n\le p<m} \frac{1}{\widetilde{\nu}(\{p,p+1\})} \sum_{q\le n} \widetilde{\mu}(q)\Phi\left(\frac{1}{\sum_{q\le n}\widetilde{\mu}(q)}\right) \quad , \text{si } n<m \\ d^+_{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m}(n) &:= \displaystyle\sum_{m\le p<n} \frac{1}{\widetilde{\nu}(\{p,p+1\})} \sum_{q\ge n} \widetilde{\mu}(q)\Phi\left(\frac{1}{\sum_{q\ge n}\widetilde{\mu}(q)}\right) \quad , \text{si } n>m \end{cases}$$

puis

$$\widetilde{D}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m) \;:=\; \max\left(\sup_{n<m} d^-_{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m}(n), \sup_{n>m} d^+_{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m}(n)\right)$$

On dispose alors de l'analogue discret du théorème 1

Proposition 12 *Supposons, pour un $m \in \mathbb{Z}$ donné, soit que le support de $\widetilde{\mu}$ n'est pas borné inférieurement et que*

$$\widetilde{D}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m) \;=\; \lim_{n\to-\infty} d^-_{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m}(n)$$

soit que le support de $\widetilde{\mu}$ n'est pas borné supérieurement et que

$$\widetilde{D}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m) \;=\; \lim_{n\to+\infty} d^+_{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m}(n)$$

on a alors,

$$\widetilde{C}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}) \;=\; 4\widetilde{D}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m)$$

Ce résultat se déduit en fait directement du théorème 1, en considérant $\mu := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mu}(n)\delta_n$ et $\nu := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\nu}(\{n,n+1\})\lambda_{]n,n+1[}$, où $\lambda_{]n,n+1[}$ est la restriction de la mesure de Lebesgue à $]n,n+1[$. En effet, on vérifie sans difficulté que $\widetilde{C}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}) = C(\mu,\nu)$ et que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{D}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu},m) = D(\mu,\nu,m)$.

Références

[1] Cécile Ané, Sébastien Blachère, Djalil Chafaï, Pierre Fougères, Ivan Gentil, Florent Malrieu, Cyril Roberto et Grégory Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 des *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2000. Avec une préface par Dominique Bakry et Michel Ledoux.

[2] F. Barthe et C. Roberto. Sobolev inequalities for probability measures on the real line. *Studia Math.*, 159(3) :481–497, 2003. Dédicacé au professeur Aleksander Pełczyński à l'occasion de son 70ième anniversaire (polonais).

[3] S. G. Bobkov et F. Götze. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 163(1) :1–28, 1999.

[4] Claude Dellacherie et Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII*, volume 1385 des *Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics]*. Hermann, Paris, revised edition, 1980. Théorie des martingales. [Martingale theory].

[5] Masatoshi Fukushima, Yōichi Ōshima et Masayoshi Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, volume 19 des *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[6] Leonard Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.*, 97(4) :1061–1083, 1975.

[7] L. Miclo. About projections of logarithmic Sobolev inequalities. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 des *Lecture Notes in Math.*, pages 201–221. Springer, Berlin, 2003.

[8] Laurent Miclo. Sur l'inégalité de Sobolev logarithmique des opérateurs de Laguerre à petit paramètre. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 des *Lecture Notes in Math.*, pages 222–229. Springer, Berlin, 2003.

[9] L. Miclo. Quand est-ce que des bornes de Hardy permettent de calculer une constante de Poincaré exacte sur la droite ? Préprint, consultable sur `http ://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00017875`, 2005.

[10] L. Miclo. Monotonicité des fonctions extrémales pour les inégalités de type Sobolev logarithmiques en dimension 1. Préprint, consultable sur `http ://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00019571`, 2005.

[11] Benjamin Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Math.*, 44 :31–38, 1972. Collection d'articles honorant les 50 années d'activité scientifique d'Antoni Zygmund, I.

miclo@latp.univ-mrs.fr
Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités
Centre de Mathématiques et Informatique
Université de Provence
39, rue Frédéric Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13, France